

GÉOMÉTRIE REPÉRÉE

Objectifs

1. Droites et vecteurs :

- *Définition d'un vecteur normal à une droite.*
- *Déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant un point et un vecteur normal.*
- *Réciproquement : déterminer un vecteur normal d'une droite connaissant une équation cartésienne de cette dernière.*
- *Caractériser deux droites perpendiculaires par leurs équations cartésiennes.*
- *Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite.*

2. Équations de cercles :

- *Déterminer et utiliser l'équation d'un cercle donné par son centre et son rayon.*
- *Reconnaître une équation de cercle et ces éléments caractéristiques.*

3. Paraboles

- *Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole.*
- *Caractérisation géométrique d'une parabole.*

Dans ce chapitre on se placera toujours dans un repère orthonormé du plan (que cela soit précisé ou non).

I Un peu d'histoire...

René **Descartes**, mathématicien, physicien et philosophe français (XVII^{ème} siècle).

Il est considéré comme l'un des fondateurs de la philosophie moderne.

Dans son « Discours de la méthode » (en 1637) il écrit la célèbre formule : « Cogito ergo sum » (ce qui signifie « Je pense, donc je suis »).

Sa façon de penser a donné l'expression « avoir un esprit cartésien » qui signifie être méthodique et rationnel.

Il contribue de façon importante à une évolution majeure en Mathématiques : la création de la « géométrie analytique » qui permet de résoudre des problèmes géométriques via des méthodes algébriques. On parle aujourd'hui de « repère cartésien », et d'« équation cartésienne ».

Il parachève le formalisme symbolique engagé par François Viète dans son « algèbre nouvelle » afin de faciliter la présentation des raisonnements mathématiques.

En physique, il contribue à la naissance de « l'optique géométrique » avec en particulier les « lois de Snell-Descartes » pour la réfraction et la réflexion de la lumière (lois découvertes simultanément et indépendamment du mathématicien et physicien Snell).

II Droites et vecteurs

II.1 Vecteur normal à une droite

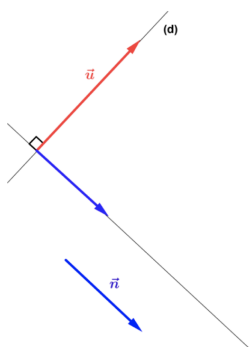
Définition 1

Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

Tout vecteur non nul et orthogonal à $\vec{u}$ est appelé un **vecteur normal** à (d)

Remarques

1. Un vecteur normal à une droite donnée est généralement noté $\vec{n}$.



2. $\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}$ signifie que $\vec{n} \neq \vec{0}$ et $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$.
3. Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à une droite, il est orthogonal à tout vecteur directeur de cette droite.
4. Il y a une infinité de vecteurs normaux à une droite donnée.

Propriété 1

Soit (d_1) une droite de vecteur directeur $\vec{u}_1$ et de vecteur normal $\vec{n}$.

1. $\vec{n}$ est un vecteur normal à une droite (d_2) si et seulement si $(d_1) // (d_2)$.
2. $\vec{n}$ est un vecteur directeur à une droite (d_2) si et seulement si $(d_1) \perp (d_2)$.

Démonstration

Soit (d_1) et (d_2) deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ (donc $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$ et $\vec{u}_2 \neq \vec{0}$).

Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à la droite (d_1) (donc $\vec{n} \neq \vec{0}$ et $\vec{n} \perp \vec{u}_1$). Notons (Δ) une droite de vecteur directeur $\vec{n}$.

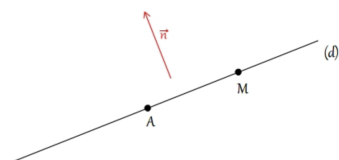
1.
 - Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite (d_2) , cela signifie qu'il est non nul et orthogonal à $\vec{u}_2$.
Or $\vec{n} \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow (\Delta) \perp (d_2)$ et $\vec{n} \perp \vec{u}_1 \Leftrightarrow (\Delta) \perp (d_1)$.
Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
Donc $(\Delta) \perp (d_1)$ et $(\Delta) \perp (d_2)$ donne $\boxed{(d_1) // (d_2)}$
 - Réciproquement, si $(d_1) // (d_2)$ alors les vecteurs non nuls $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{u}_2 = \lambda \vec{u}_1$.
Or $\vec{n} \perp \vec{u}_1 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda(\vec{n} \cdot \vec{u}_1) = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot (\lambda \vec{u}_1) = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u}_2$,
donc $\boxed{\vec{n} \text{ est un vecteur normal à la droite } (d_2)}$

2. • Si $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite (d_2) , puisque $\vec{u}_2$ est un vecteur directeur de la droite (d_2) , alors ils sont colinéaires et non nuls. Donc : $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{u}_2 = \lambda \vec{n}$ (1).
De plus, $\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite (d_1) donc $\vec{u}_1 \cdot \vec{n} = 0$ (2).
(1) et (2) donne : $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_1 \cdot (\lambda \vec{n}) = \lambda(\vec{u}_1 \cdot \vec{n}) = \lambda \times 0 = 0$ donc $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$ et donc $(d_1) \perp (d_2)$
- Réciproquement, si $(d_1) \perp (d_2)$, puisque $(\Delta) \perp (d_1)$, et que deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles, $(d_2) // (\Delta)$. Ces deux droites admettent donc les mêmes vecteurs directeurs.
Donc (Δ) admettant $\vec{n}$ pour vecteur directeur, $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (d_2) .

Propriété 2

Soit (d) une droite de vecteur normal $\vec{n}$, A un point de (d) et M un point du plan.

$$M \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$



Démonstration

Soit (d) une droite de vecteur normal $\vec{n}$, A un point de (d) et M un point du plan.

- Si $M \in (d)$:
 - ◇ Soit M et A sont confondus et dans ce cas $\overrightarrow{AM} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
 - ◇ Soit M et A sont distincts. Dans ce cas les points A et M sont sur (d) et donc le vecteur non nul $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de (d) . Or $\vec{n}$ est un vecteur normal à (d) donc, par définition, $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$ et donc $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
- Réciproquement, si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$:
 - ◇ Soit M et A sont confondus et dans ce cas A étant sur (d) , $M \in (d)$.
 - ◇ Soit M et A sont distincts. Dans ce cas la droite (AM) a son vecteur directeur $\overrightarrow{AM}$ orthogonal à $\vec{n}$ et donc, par définition, $\vec{n}$ est un vecteur normal à (AM) .
Les droites (d) et (AM) ayant un même vecteur normal, sont parallèles. De plus ces deux droites ont le point A en commun, donc elles sont confondues. Et donc $M \in (d)$.

II.2 Équation cartésienne de droite et vecteur normal

Propriété 3

Soit (d) une droite de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Une équation cartésienne de (d) est de la forme $ax + by + c = 0$, avec c un réel.

Remarques

1. Les autres équations cartésiennes sont toutes les équations de la forme $\lambda ax + \lambda by + \lambda c = 0$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
2. Ce résultat n'est valable que dans un repère orthonormé.

Démonstration

Soit (d) une droite de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $A(x_A; y_A)$ un point de (d) et $M(x, y)$ un point du plan.

Déterminons une équation cartésienne de (d) .

$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ donc : $M \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x - x_A)a + (y - y_A)b = 0 \Leftrightarrow ax + by - ax_A - by_A = 0$

Ainsi $M(x, y) \in (d) \Leftrightarrow ax + by + c = 0$, avec $c = -ax_A - by_A$ un réel qui ne dépend que de A et $\vec{n}$.

Une équation cartésienne de (d) est donc $ax + by + c = 0$ avec a et b les coordonnées d'un vecteur normal à (d)

La réciproque de cette propriété est aussi vraie :

Propriété 4

Soit (d) une droite ayant pour équation cartésienne : $ax + by + c = 0$, avec a, b et c des réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$.

Alors $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d) .

Démonstration

Soit (d) une droite ayant pour équation cartésienne : $ax + by + c = 0$, avec a, b et c des réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$.

Montrons que $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d) .

Puisque $(a; b) \neq (0; 0)$ et $(d) : ax + by + c = 0$, $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) .

Or $\vec{u} \cdot \vec{n} = -b \times a + a \times b = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{n}$.

De plus $(a; b) \neq (0; 0)$ donc $\vec{n} \neq \vec{0}$.

Par définition, $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d)

EXERCICE

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point $A(2; 5)$ et le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

(b) Que dire des équations $-6x - 14y + 82 = 0$ et $y = -\frac{3}{7}x + \frac{41}{7}$?

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les droites d_1 et d_2 , d'équations respectives :

$$5x - 4y + 8 = 0 \text{ et } y = 2x + 3$$

Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à chacune de ces droites.

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1; 2)$ et $B(-1; 4)$.

Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$.

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les droites d_1 et d_2 , d'équations respectives :

$$2x - 5y + 2 = 0 \text{ et } \frac{3}{7}x + \frac{17}{100}y = 0$$

Tracer ces droites. Ces droites sont-elles perpendiculaires (conjecturer puis vérifier votre conjecture par un calcul) ?

Corrigé de l'exercice

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point $A(2; 5)$ et le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminons une équation cartésienne de la droite (d) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

$\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ donc une équation cartésienne de (d) est de la forme : $3x + 7y + c = 0$.

De plus $A(2; 5) \in (d)$ donc ses coordonnées vérifient cette équation.

Or $3 \times 2 + 7 \times 5 + c = 0 \Leftrightarrow c = -6 - 35 \Leftrightarrow c = -41$.

Par conséquent $(d) : 3x + 7y - 41 = 0$

(b) Démontrons que les équations $-6x - 14y + 82 = 0$ et $y = -\frac{3}{7}x + \frac{41}{7}$ sont aussi des équations de (d)

- $3x + 7y - 41 = 0 \Leftrightarrow -2 \times (3x + 7y - 41) = -2 \times 0 \Leftrightarrow -6x - 14y + 82 = 0$,

donc $-6x - 14y + 82 = 0$ est une équation cartésienne de (d)

- $3x + 7y - 41 = 0 \Leftrightarrow 7y = -3x + 41 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{7}x + \frac{41}{7}$.

Donc $y = -\frac{3}{7}x + \frac{41}{7}$ est l'équation réduite de (d)

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les droites d_1 et d_2 , d'équations respectives :

$$5x - 4y + 8 = 0 \text{ et } y = 2x + 3$$

Déterminons les coordonnées d'un vecteur normal à chacune de ces droites.

- $5x - 4y + 8 = 0$ est une équation cartésienne de (d_1) donc $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d_1)

- $y = 2x + 3$ est une équation réduite de (d_2) , or $y = 2x + 3 \Leftrightarrow -2x + y - 3 = 0$,

donc $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d_2)

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1; 2)$ et $B(-1; 4)$.

Déterminons une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$.

La médiatrice d'un segment le coupe perpendiculairement en son milieu, donc la médiatrice du segment $[AB]$ passe par le milieu I de $[AB]$ et, étant perpendiculaire à (AB) , elle a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ avec :

- $x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + 4}{2} = \frac{6}{2} = 3$ donc $I(0; 3)$

- $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 - 1 \\ 4 - 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Donc une équation cartésienne de (Δ) est de la forme : $-2x + 2y + c = 0$.

De plus $I(0; 3) \in \Delta$ donc ses coordonnées vérifient cette équation.

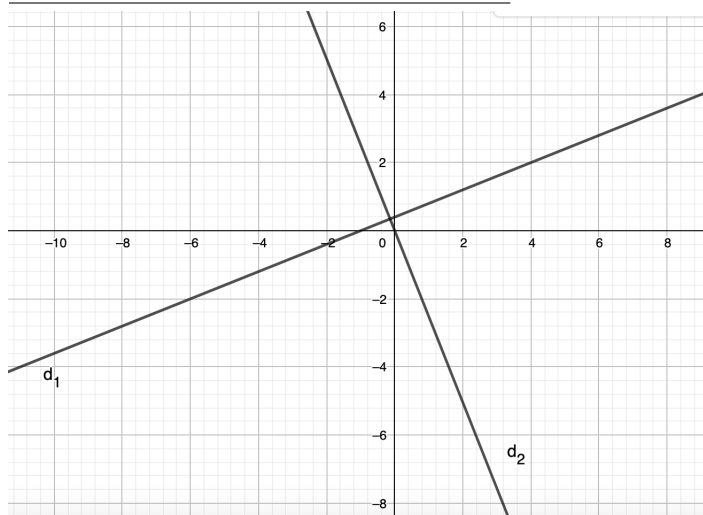
Or $-2 \times 0 + 2 \times 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = -6$.

Par conséquent la médiatrice de $[AB]$ a pour équation cartésienne $-2x + 2y - 6 = 0$

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les droites d_1 et d_2 , d'équations respectives :

$$2x - 5y + 2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{3}{7}x + \frac{17}{100}y = 0$$

Représentation graphique de ces deux droites :



Conjecture : ces droites semblent perpendiculaires.

Vérification de la conjecture :

Les droites d_1 et d_2 , ont pour équations respectives :

$$2x - 5y + 2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{3}{7}x + \frac{17}{100}y = 0$$

Donc d_1 a pour vecteur directeur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et d_2 a pour vecteur directeur $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -\frac{17}{3} \\ \frac{100}{7} \end{pmatrix}$.

$$\text{Or } \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 5 \times \left(-\frac{17}{100}\right) + 2 \times \frac{3}{7} = -\frac{17}{20} + \frac{6}{7} = \frac{-119 + 120}{140} = \frac{1}{140} \approx 0,007$$

Puisque $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \neq 0$, ces vecteurs ne sont pas orthogonaux,

et donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas perpendiculaires et notre conjecture est fautive

Propriété 5

Soit (d_1) et (d_2) deux droites admettant respectivement les équations cartésiennes : $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$, avec a, b, c, a', b' et c' des réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$ et $(a'; b') \neq (0; 0)$.

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$$

Remarques

1. Dans le 4. de l'exercice précédent on aurait pu remarquer que :

$$2 \times \frac{3}{7} + (-5) \times \frac{17}{100} = \frac{6}{7} - \frac{17}{20} = \frac{120 - 119}{140} = \frac{1}{140} \approx 0,007.$$

2. On avait déjà : $(d_1) \perp (d_2)$ si et seulement s'ils ont le même vecteur normal, autrement dit si :

$$d_1 : ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad d_2 : ax + by + c' = 0.$$

Démonstration

Soit (d_1) et (d_2) deux droites admettant respectivement les équations cartésiennes :

$ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$, avec a', b', c, a', b' et c' des réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$ et $(a'; b') \neq (0; 0)$.

Démontrons que : $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$.

$d_1 : ax + by + c = 0$ donc elle admet $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

De même, $d_2 : a'x + b'y + c' = 0$ donc elle admet $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Or $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = -b \times (-b') + a \times a' = aa' + bb'$

Donc $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$.

D'où le résultat : $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$

Remarque

Les vecteurs $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux respectivement aux droites d_1 et d_2 .

Or $aa' + bb' = 0 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ donc :

$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

EXERCICE

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère la droite d'équation $x - 3y + 3 = 0$ et le point A de coordonnées $(2; 5)$. Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite (d) .

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_1) , perpendiculaire à (d) passant par A .
2. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de A sur (d) .

Corrigé de l'exercice

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère la droite (d) d'équation $x - 3y + 3 = 0$ et le point A de coordonnées $(2; 5)$.

1. Déterminons une équation cartésienne de la droite (d_1) , perpendiculaire à (d) passant par A .

La droite (d) a pour équation cartésienne $x - 3y + 3 = 0$, donc un vecteur normal à (d) , et donc un vecteur directeur de la perpendiculaire (d_1) , est $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Donc $(d_1) : -3x - y + c = 0$.

De plus (d_1) passe par $A(2; 5)$ donc : $-3x_A - y_A + c = 0$ avec :

$$-3x_A - y_A + c = 0 \Leftrightarrow -3 \times 2 - 5 + c = 0 \Leftrightarrow c = 11.$$

Donc $(d_1) : -3x - y + 11 = 0$

2. Déterminons les coordonnées du projeté orthogonal de A sur (d) .

Ce projeté est à l'intersection des droites (d) et (d_1) donc ses coordonnées $(x; y)$ vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ -3x - y + 11 = 0 \end{cases}$$

Réolvons ce système par combinaisons linéaires :

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 & L_1 \\ -3x - y + 11 = 0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 3 = 0 & L_1 \leftarrow L_1 \\ -10y + 20 = 0 & L_2 \leftarrow 3L_1 + L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 3 = 0 & L_1 \leftarrow L_1 \\ y = 2 & L_2 \leftarrow L_2 \end{cases}$$

$$\text{On termine par une substitution : } \begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \times 2 + 3 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Le projeté orthogonal de A sur (d) est donc le point de coordonnées $(3; 2)$

III Équations de cercle

Propriété 6

Soit un point $A(x_A; y_A)$ et R un réel strictement positif.

Le point $M(x; y)$ appartient au cercle de centre A et de rayon R si et seulement si :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$$

Démonstration

Soit un point $A(x_A; y_A)$ et R un réel strictement positif. Notons $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon R .

$M(x; y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow AM = R \Leftrightarrow AM^2 = R^2$ (puisque AM et R sont des distances donc des nombres positifs).

D'où $M(x; y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$

Définition 2

Soit un point $A(x_A; y_A)$ et R un réel strictement positif.

L'équation $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$ est appelée une **équation cartésienne du cercle de centre A et de rayon R** .

Remarques

1. $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x_Ax + x_A^2 + y^2 - 2y_Ay + y_A^2 - R^2 = 0$.
Donc l'équation de ce cercle est de la forme $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$.
2. Si le cercle a pour équation cartésienne une équation de la forme $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$, puisque $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0 \Leftrightarrow \lambda(x^2 + ax + y^2 + by + c) = 0$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, il existe une infinité d'équations cartésiennes pour un même cercle. Mais celle que l'on donne habituellement c'est celle qui a 1 pour coefficient de x^2 ou y^2 .

Propriété 7

L'ensemble $E = \{M(x, y) \in \mathcal{P} / x^2 + ax + y^2 + by + c = 0\}$, avec a, b et c des réels donnés, est soit un cercle, soit un singleton, soit l'ensemble vide.

Démonstration

Soit $E = \{M(x, y) \in \mathcal{P} / x^2 + ax + y^2 + by + c = 0\}$, avec a, b et c des réels donnés.

$$\begin{aligned} x^2 + ax + y^2 + by + c = 0 &\Leftrightarrow \left(x^2 - 2 \times \left(-\frac{a}{2}\right)x + \frac{a^2}{4}\right) - \frac{a^2}{4} + \left(y^2 - 2 \times \left(-\frac{b}{2}\right)y + \frac{b^2}{4}\right) - \frac{b^2}{4} + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \left(-\frac{a}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(-\frac{b}{2}\right)\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c. \end{aligned}$$

Une telle équation est de la forme : $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma$, avec α, β et γ des réels qui dépendent de a, b et c . Notons Ω le point de coordonnées $(\alpha; \beta)$.

- Si $\gamma > 0$, $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma \Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$ avec $R = \sqrt{\gamma}$

et donc E est le cercle de centre $\Omega(\alpha; \beta)$ et de rayon $\sqrt{\gamma}$

- Si $\gamma = 0$, $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma \Leftrightarrow \Omega M^2 = 0 \Leftrightarrow \Omega M = 0$ et donc $E = \{\Omega(\alpha; \beta)\}$
- Si $\gamma < 0$, $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma$ est impossible puisque le premier membre, comme somme de carrés, est positif. Donc $E = \emptyset$

EXERCICE

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(2; -3)$ et de rayon 4.
 - (a) Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$.
 - (b) Le point $B(6; -2)$ appartient-il à $\mathcal{C}$?
 - (c) Déterminer les coordonnées des points de $\mathcal{C}$ d'abscisse 2.
 - (d) Déterminer les éventuels points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite d'équation $y = 2x + 1$.
2. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Les équations suivantes sont-elles des équations de cercle ? Si oui déterminer le centre et le rayon du cercle.
 - (a) $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$
 - (b) $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 19 = 0$
 - (c) $x^2 + y^2 - 3 = 0$
3. Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé et deux points distincts du plan $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.
Démontrer qu'une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ est :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

Corrigé de l'exercice

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(2; -3)$ et de rayon 4.

(a) Déterminons une équation du cercle $\mathcal{C}$.

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = 4^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 16 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$$

Une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$, de centre $A(2; -3)$ et de rayon 4, est $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$

(b) Déterminons si le point $B(6; -2)$ appartient à $\mathcal{C}$.

$$x_B^2 - 4x_B + y_B^2 + 6y_B - 3 = 6^2 - 4 \times 6 + (-2)^2 + 6 \times (-2) - 3 = 36 - 24 + 4 - 12 - 3 = 1$$

Puisque les coordonnées de B ne vérifient pas l'équation de $\mathcal{C}$, $B(6; -2) \notin \mathcal{C}$

(c) Déterminons les coordonnées des points de $\mathcal{C}$ d'abscisse 2.

Déterminer de tels points revient à déterminer les $M(2; y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{C}$. Autrement dit résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$: $2^2 - 4 \times 2 + y^2 + 6y - 3 = 0$.

$$\text{Or } 2^2 - 4 \times 2 + y^2 + 6y - 3 = 0 \Leftrightarrow 4 - 8 + y^2 + 6y - 3 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 6y - 7 = 0.$$

Résolvons cette équation du second degré :

$$1 \text{ est une solution évidente et } y^2 + 6y - 7 = (y - 1)(y + 7) \text{ donc } y^2 + 6y - 7 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ou } y = -7.$$

Les coordonnées des points de $\mathcal{C}$ d'abscisse 2 sont $(2; 1)$ et $(2; -7)$

(d) Déterminons les éventuels points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite d'équation $y = 2x + 1$.

Déterminer les coordonnées de tels points revient à résoudre le système formé par les équations du cercle et de la droite par substitutions :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + (2x + 1)^2 + 6 \times (2x + 1) - 3 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4x^2 + 4x + 1 + 12x + 6 - 3 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 12x + 4 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Or $5x^2 + 12x + 4 = 0$ est une équation du second degré avec :

$\Delta = 12^2 - 4 \times 5 \times 4 = 144 - 80 = 64$; et puisque $\Delta > 0$, cette équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-12 + \sqrt{64}}{2 \times 5} = \frac{-12 + 8}{10} = \frac{-4}{10} = -\frac{2}{5} \text{ et } x_2 = \frac{-12 - \sqrt{64}}{2 \times 5} = \frac{-12 - 8}{10} = \frac{-20}{10} = -2.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \begin{cases} x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \text{ ou } x = -2 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = 2 \times \left(-\frac{2}{5}\right) + 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \times (-2) + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi le cercle et la droite ont deux points d'intersection : les points de coordonnées $\left(-\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$ et $(-2; -3)$

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé.

(a) Déterminons l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$.

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y + 4)^2 - 16 + 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 9 \text{ avec } \sqrt{9} = 3.$$

Donc l'équation $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$ est celle du cercle de centre $\Omega(1; -4)$ et de rayon 3

(b) Déterminons l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 19 = 0$.

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 19 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+4)^2 - 16 + 19 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+4)^2 = -3 \text{ avec } -3 < 0.$$

Donc l'ensemble étudié est $\emptyset$ et donc l'équation $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 19 = 0$ n'est pas celle d'un cercle

(c) Déterminons l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant $x^2 + y^2 - 3 = 0$.

$$x^2 + y^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = 3$$

Donc l'équation $x^2 + y^2 - 3 = 0$ est celle du cercle de centre $O(0; 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$

3. Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé et deux points distincts du plan $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

Démontrons qu'une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ est $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$
 $M(x; y) \in \mathcal{C} - \{A; B\}$ si et seulement si ABM est un triangle rectangle en M , soit $(AM) \perp (BM)$.

Or, M étant distinct de A et B , $(AM) \perp (BM) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

Puisque $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x - x_B \\ y - y_B \end{pmatrix}$,

$$M(x; y) \in \mathcal{C} - \{A; B\} \Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0.$$

Par ailleurs, si M est confondu avec A :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = (x_A - x_A)(x - x_B) + (y_A - y_A)(y - y_B) = 0$$

et si M est confondu avec B :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = (x - x_A)(x_B - x_B) + (y - y_A)(y_B - y_B) = 0.$$

Donc : $M(x; y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$.

Et donc une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$ est $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$

IV Paraboles

IV.1 Éléments caractéristiques d'une parabole

Dans le chapitre 1 nous avons vu que :

- par définition, la fonction f qui à tout réel x associe le réel $ax^2 + bx + c$, avec a, b et c des réels donnés et $a \neq 0$, est une fonction polynôme du second degré et sa représentation graphique est appelée une **parabole** ;
- le point de coordonnées (α, β) , avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ est soit un maximum (si $a < 0$), soit un minimum (si $a > 0$) et est appelé le **sommet de la parabole**
- la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ admet un axe de symétrie : la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$, ou encore $x = \alpha$ avec α l'abscisse du sommet de la parabole.

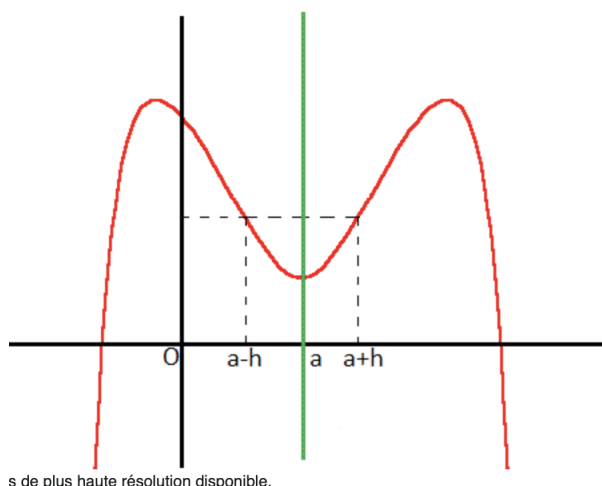
Ce dernier point n'a été démontré que pour la fonction carré (l'axe de symétrie est l'axe des ordonnées puisque la fonction est paire sur $\mathbb{R}$).

Admettons la propriété suivante :

Propriété 8

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal .

La courbe C_f admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie si et seulement si, pour tout réel $h \in \mathbb{R}$ tel que $a + h \in D_f$ on a $a - h \in D_f$ et $f(a + h) = f(a - h)$.



s de plus haute résolution disponible.

Propriété 9

La parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ admet un axe de symétrie : la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$

Démonstration

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme de degré 2 et $\mathcal{P}$ la parabole qui lui est associée dans un repère orthonormal.

Montrons que $\mathcal{P}$ admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$

- La fonction f étant définie sur $\mathbb{R}$, on a bien pour tout réel h , $-\frac{b}{2a} - h \in D_f$ et $-\frac{b}{2a} + h \in D_f$.
- Soit h un réel quelconque, d'une part :

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{b}{2a} + h\right) &= a\left(-\frac{b}{2a} + h\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a} + h\right) + c \\ &= \frac{b^2}{4a} - bh + ah^2 - \frac{b^2}{2a} + bh + c \\ &= -\frac{b^2}{4a} + ah^2 + c \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{b}{2a} - h\right) &= a\left(-\frac{b}{2a} - h\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a} - h\right) + c \\ &= \frac{b^2}{4a} + bh + ah^2 - \frac{b^2}{2a} - bh + c \\ &= -\frac{b^2}{4a} + ah^2 + c \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } f\left(-\frac{b}{2a} + h\right) = f\left(-\frac{b}{2a} - h\right).$$

La fonction f admet bien un axe de symétrie : la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$

EXERCICE

1. Déterminer le sommet et l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = 3x^2 - 2x + 1$.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de la parabole d'équation $y = (x - 2)(x + 4)$.
3. Soit m un nombre réel. La courbe $\mathcal{C}$ a pour équation

$$y = (m^2 + 4m + 1)x^2 + (2 + m)x - 5$$

- (a) déterminer la nature de $\mathcal{C}$ selon la valeur de m .
- (b) Dans le cas où $\mathcal{C}$ est une parabole, existe-t-il des valeurs de m pour lesquelles la droite $x = -1$ est l'axe de symétrie de $\mathcal{C}$?

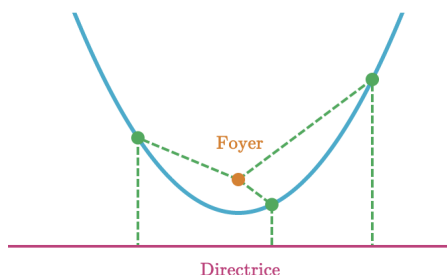
Corrigé de l'exercice

IV.2 Parabole et géométrie

Propriété 10

L'ensemble des points équidistants d'une droite Δ et d'un point F , non situé sur Δ , est appelé parabole de **foyer** F et de **directrice** Δ .

Soit K le projeté orthogonal de F sur Δ . Le point S , milieu de $[FK]$, est le sommet de la parabole.



Démonstration

Nous allons faire la démonstration dans un cas particulier où la directrice Δ a pour équation $y = 3$ et le foyer F pour coordonnées $(2, -1)$.

Déterminons l'ensemble $\mathcal{P}$ des points $M(x; y)$ du plan équidistants de Δ et F

- $F(2, -1)$ donc $y_F \neq 3$ et donc $F \notin \Delta$.
- La distance du point M à la directrice est la distance séparant ce point à son projeté orthogonal sur cette droite.

Or la droite Δ a pour équation cartésienne $y = 3$ dans un repère orthonormal. Elle est donc parallèle à l'axe des abscisses et donc le projeté orthogonal H de tout point $M(x; y)$ sur cette droite a pour coordonnée $(x; 3)$. Autrement dit $MH = \sqrt{(x - x)^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{(y - 3)^2}$.

- F a pour coordonnées $(2, -1)$ donc $FM = \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2}$
- $MH = MF \Leftrightarrow \sqrt{(y - 3)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2}$
 $\Leftrightarrow (y - 3)^2 = (x - 2)^2 + (y + 1)^2$
 $\Leftrightarrow y^2 - 6y + 9 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1$
 $\Leftrightarrow -8y = x^2 - 4x - 4$
 $\Leftrightarrow y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

L'ensemble des points équidistants d'une droite $\Delta : y = 3$ et du point $F(2; -1)$ est la parabole d'équation

$$y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Remarque

La parabole a de nombreuses propriétés et cette définition géométrique ne limite pas la notion de parabole à celles étudiées (la directrice ici est parallèle à l'axe des abscisses).

Voir le site pour plus d'information.